Построение логарифмических частотных характеристик по передаточной функции разомкнутой системы.

Внимание! В этом документе используется устаревшее обозначение оператора дифференцирования "p" вместо современного "s"!

Рассмотрим процесс построения логарифмических характеристик на примере заданной передаточной функции системы, а именно:

Дано:

$$W(p) = \frac{K(1+pT_2)^2}{p(1+pT_1)\cdot(1+2\xi T_3 p + T_3^2 p^2)}$$

К=100; T1 = 2 с. T2 = 0.5 с. T3 = 0.02 с. $\xi = 0.5$.

Для построения частотных характеристик перейдем к комплексному коэффициенту усиления, заменив p на $j\omega$ и представив каждый множитель в полярной системе координат как амплитуду и соответствующую ей фазу:

$$W(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_2)^2}{j\omega\cdot(1+j\omega T_1)\cdot(1-T_3^2\omega^2 + j2\xi T_3\omega)} = \frac{A_0(w)e^{j\varphi_0(w)}\cdot A_2^2(w)e^{2j\varphi_2(w)}}{A_4(w)e^{j\varphi_4(w)}\cdot A_1(w)e^{j\varphi_1(w)}\cdot A_3(w)e^{j\varphi_3(w)}} =$$

$$= \frac{A_0(w)A_2^2(w)}{A_4(w)A_1(w)A_3(w)} e^{j(\varphi_0(w)+2\varphi_2(w)-\varphi_4(w)-\varphi_1(w)-\varphi_3(w))}$$

Перечислим множители числителя и знаменателя в следующем порядке:

0 – K;

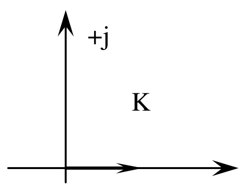
1 - $(1+j\omega T_1)$;

2 - $(1+j\omega T_2)$;

3 - $(1-T_3^2\omega^2 + j2\xi T_3\omega)$;

4 - $j\omega$.

0) **K**: Такое число на комплексной плоскости выглядит как:

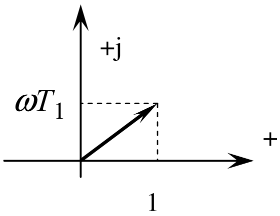


Его можно записать в виде модуля и аргумента:

$$K = K\,e^{j0} = A_0(w)e^{j\varphi_0(w)} \Rightarrow A_0(w) = K; \varphi_0(w) = 0.$$

Подробнее о представлении комплексных чисел – по ссылке:
http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE#.D0.9F.D1.80.D0.B5.D0.B4.D1.81.D1.82.D0.B0.D0.B2.D0.BB.D0.B5.D0.BD.D0.B8.D0.B5_.D0.BA.D0.BE.D0.BC.D0.BF.D0.BB.D0.B5.D0.BA.D1.81.D0.BD.D1.8B.D1.85_.D1.87.D0.B8.D1.81.D0.B5.D0.BB

1) $(1+j\omega T_1)$: Такое число на комплексной плоскости выглядит как:



Его можно записать в виде модуля и аргумента:

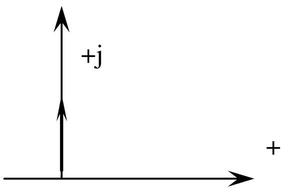
$$1+j\omega T_1=\sqrt{1^2+\omega^2 T_1^2}\cdot e^{jarctg\,\omega T_1}=$$

$$=A_1(w)e^{j\varphi_1(w)}\Rightarrow A_1(w)=\sqrt{1^2+\omega^2 T_1^2};\varphi_1(w)=arctg\,\omega T_1$$

2) $1+j\omega T_2=\sqrt{1^2+\omega^2 T_2^2}\cdot e^{jarctg\,\omega T_2}$

Представляется на комплексной плоскости аналогично звену 1).

4) $j\omega=\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$



3) $(1-\omega^2T_3^2)+j2\xi T_3\omega=\sqrt{(1-\omega^2T_3^2)^2+4\xi T_3^2\omega^2}\cdot e^{j\varphi_3(w)}$

$$\varphi_3(w)=\begin{cases} arctg\,\dfrac{2\xi T_3\omega}{1-T_3^2\omega^2} & \omega\le\dfrac{1}{T} \\ \pi-arctg\,\dfrac{2\xi T_3\omega}{\left|1-T_3^2\omega^2\right|} & \omega>\dfrac{1}{T} \end{cases}$$

Теперь запишем выражения для амплитуды и фазы комплексного коэффициента усиления всей системы:

$$A(\omega)=\frac{K(\sqrt{1+\omega^2T_2^2})^2}{\omega\sqrt{1+\omega^2T_1^2}\cdot\sqrt{(1-T_3^2\omega^2)^2+4\xi^2T_3^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=2arctg\,\omega T_2-arctg\,\omega T_1-\frac{\pi}{2}-\varphi_3(w)$$

K=100; T1 = 2; T2 = 0.5; T3 = 0.02; $\xi=0.5$.

Строим ЛАЧХ, ЛФЧХ, АФХ.

Построение ЛАЧХ

Запишем выражение для ЛАЧХ, прологарифмировав амплитудную частотную характеристику системы $A(\omega)$:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+(\omega T_1)^2} + 40\lg\sqrt{1+(\omega T_2)^2} -$$

$$- 20\lg\sqrt{(1-T_3^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T_3^2\omega^2};$$

Запишем частоты сопряжения в порядке их возрастания:

$$\omega_1 = 1/T_1 = 0.5$$

$$\omega_2 = 1/T_2 = 2$$

$$\omega_3 = 1/T_3 = 50$$

И рассмотрим участки асимптотической ЛАЧХ:

0 участок: $\omega < 1/T_1 \qquad \omega T_1 < 1 \qquad \omega T_2 < 1 \qquad \omega T_3 < 1$

$$L_0(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega$$

При изменении частоты на 1 декаду, т.е. в 10 раз, значение L_0(w) изменится на -20 Дб. Это значит, что наклон этого участка ЛАЧХ «-20 децибел на декаду».

1 –й участок:

$$\omega_1 < \omega < \omega_2 \qquad \frac{1}{T_1} < \omega < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3}$$

$$\Rightarrow \omega > \frac{1}{T_1}; \quad \omega < \frac{1}{T_2}; \quad \omega < \frac{1}{T_3}$$

$$\omega T_1 >; \quad \omega T_2 < 1; \quad \omega T_3 < 1$$

$$L_1'(\omega) = L_0' - 20\lg\omega T_1 = 20\lg K - 20\lg\omega - 20\lg\omega T_1 =$$

$$20\lg K - 20\lg\omega - 20\lg\omega - 20\lg T_1 = -40\lg\omega + 20\lg\frac{K}{T_1}$$ **=> наклон -40 Дб./дек.**

2-ой участок

$$\omega_2 < \omega < \omega_3$$

$$\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3}$$

$$\omega T_1 > 1; \quad \omega T_2 > 1; \quad \omega T_3 < 1$$

$$L_2'(\omega) = L_1'(\omega) + 40\lg\omega T_2 = 20\lg K - 20\lg\omega - 20\lg\omega T_1 + 40\lg\omega T_2 = 20\lg\frac{KT_2^2}{T_1} + 0\lg\omega$$

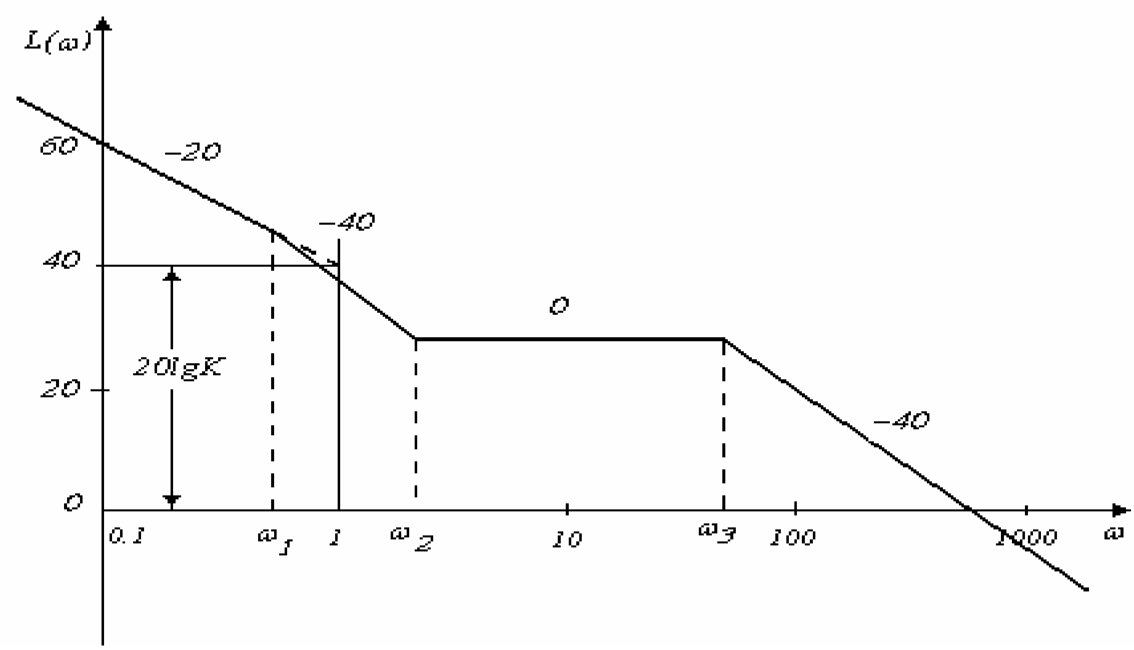
=> наклон 0 Дб./дек.

3-й участок.

$$L_3'(\omega) = L_2'(\omega) - 40\lg T_3\omega = 20\lg\frac{KT_2^2}{T_1 T_3^2} - 40\lg\omega$$ **=> наклон -40 Дб./дек.**

Таким образом, видно, что асимптотическая ЛАЧХ состоит из 4-х прямолинейных участков с наклонами, определенными для каждого участка в отдельности.

Приступаем к построению ЛАЧХ. На оси частот отмечаем сопрягающие частоты. Через точку (1;20lgK) проводим пунктиром прямую с наклоном начального (самого первого) участка ЛАЧХ. Затем обводим этот пунктир слева и до первой сопрягающей частоты. Это и будет начальный (первый) участок ЛАЧХ. Далее участки начинаем строить из конца предыдущего участка с соответствующими наклонами, определенными выше.



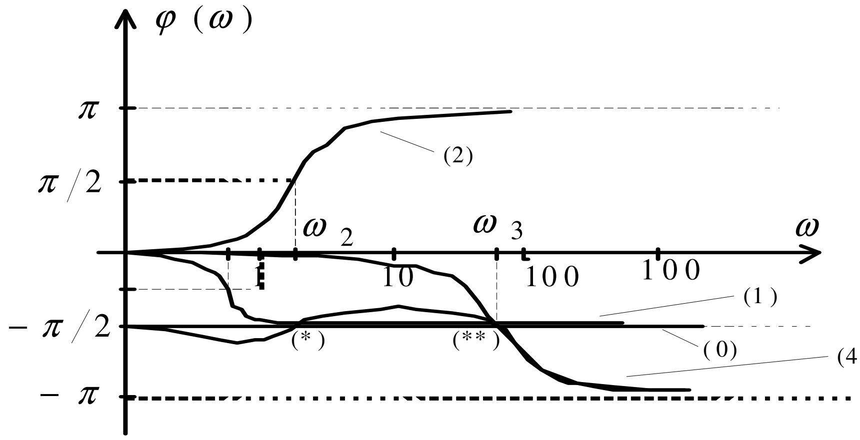
<u>Построение ЛФЧХ</u>

Запишем выражение для фазовой частотной характеристики:

$$\varphi(\omega) = 2arctg\,\omega T_2 - arctg\,\omega T_1 - \frac{\pi}{2} - \varphi_3(w)$$

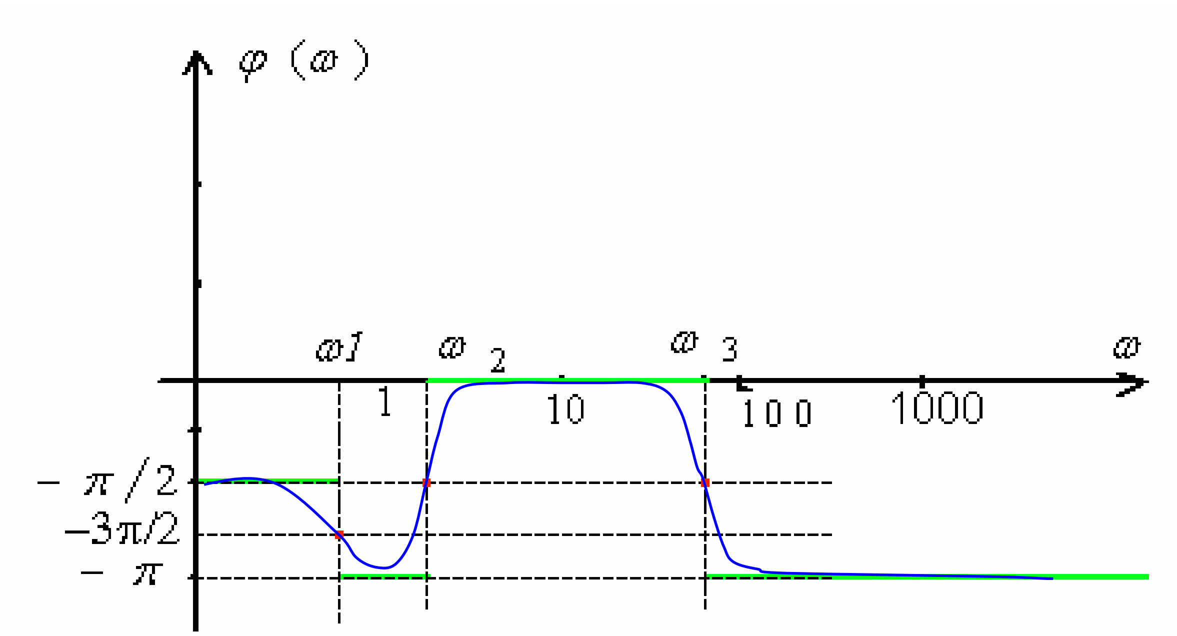
$$\varphi_3(w) = \begin{cases} arctg\,\dfrac{2\xi T_3\omega}{1-T_3^2\omega^2} & \omega \le \dfrac{1}{T} \\ \pi - arctg\,\dfrac{2\xi T_3\omega}{\left|1-T_3^2\omega^2\right|} & \omega > \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

Звенья записаны по порядку следования, т.е. $-\dfrac{\pi}{2}$ – нулевое, $-arctg\,\omega T_1$ – первое и т.д.



Таким образом, построив фазовые частотные характеристики отдельных звеньев и просуммировав их. Получаем фазовую частотную характеристику заданной системы.

Альтернативный способ построения ЛФЧХ:



Рассматриваем участки оси частот аналогично тому, как это делалось для ЛАЧХ. На каждом из участков анализируем слагаемые *φ(w)*. Если $wT_i < 1$, то *arctg*(wT_i) принимаем равным 0. Если $wT_i > 1$, то *arctg*(wT_i) принимаем равным $\pi/2$. Таким образом по участкам оси частот:

0) $\varphi(\omega) = 2arctg\,\omega T_2 - arctg\,\omega T_1 - \dfrac{\pi}{2} - \varphi_3(w) = -\dfrac{\pi}{2}$

1) $-\pi$

2) 0

3) $-\pi$

В результате мы получили значения, к которым будет стремиться ЛФЧХ на соответствующих участках частот. Обозначим жирными зелеными линиями эти значения на соответствующих участках частотах. При переходе между этими участками частот обозначим жирными точками середины между двумя соседними уровнями.

Т.е. на w_1 – "$-3\pi/2$", на w_2 – "$-\pi/2$", на w_3 – "$-\pi/2$".

Далее проводим ЛФЧХ от руки так, что на соответствующих отрезках оси частот она стремится к выделенным жирным линиям, а при переходе между ними проходит по жирным точкам. Результат – синяя линия.

Построение АФХ.

Построение проводится по ЛАЧХ и по ЛФЧХ.

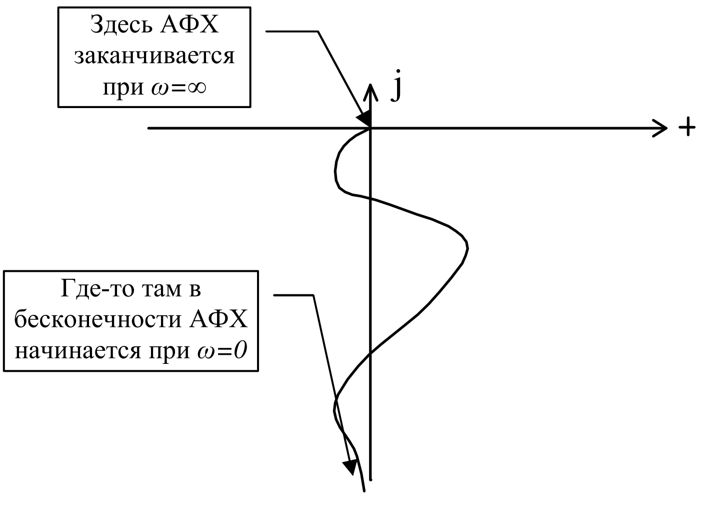
Определим значения амплитудной и фазовой частотных характеристик в нуле и на бесконечности:

$$A(0) = \infty \qquad A(\infty) = 0$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \qquad \varphi(\infty) = -\pi$$

Теперь мы знаем, в каких точках начинается и заканчивается АФХ.

АФХ – это кривая, представляющая собой геометрическое место концов радиус-вектора комплексного коэффициента усиления при изменении частоты от 0 до бесконечности. Учитывая, что ЛАЧХ показывает длину радиус-вектора, а ЛФЧХ – угол, под которым он выходит из начала координат, то по построенным ЛАЧХ и ЛФЧХ можно представить вид амплитудной фазовой характеристики:



.